

I- équation du premier degré à deux inconnues :

1- **Définition** : toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ est appelé équation du premier degré à deux inconnues tels que a, b et c sont des nombres réels connues. (Premier degré : les exposants de x et y c'est 1 ; deux inconnues : x et y)

2- Solution d'équation du premier degré à deux inconnues :

Résoudre une équation du premier degré à deux inconnues, c'est trouver tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient cette équation.

(E) : $2x - y + 3 = 0$ est une équation du premier degré à deux inconnues. Le couple $(0 ; 3)$ est une solution de cette équation car $2 \times 0 - 3 + 3 = 0 - 3 + 3 = -3 + 3 = 0$ et $(\frac{1}{2} ; 4)$ est une autre solution de cette équation car $2 \times \frac{1}{2} - 4 + 3 = 1 - 4 + 3 = -3 + 3 = 0$. l'équation (E) admet une infinité de solutions ; et puisque elle peut s'écrire sous la forme (E) : $y = 2x + 3$ donc toute solution de (E) est de la forme : $(x ; 2x + 3)$. (on donne une valeur à x et on calcule la valeur de y).

Remarque : la représentation graphique des solutions d'équation du premier degré à deux inconnues est une droite.

Exemple : dans le repère orthonormé (O, I, J) , la droite (D) d'équation $y = 2x + 3$ est la représentation graphique de l'équation : $2x - y + 3 = 0$. (voir figure Ci-dessous).

!!- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

1- **Définition** : a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels fixes, et x et y sont des inconnues.

L'écriture (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ est un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y .

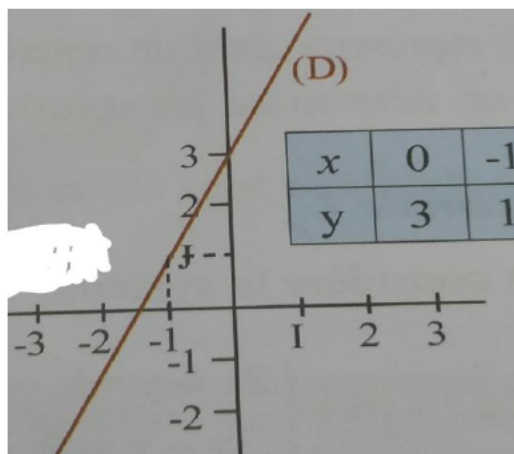
2- Solution du Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient simultanément les deux équations du système $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$.

Exemple :

Soit le système (S) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 & \textcircled{1} \\ x - 2y = 4 & \textcircled{2} \end{cases}$

- ❖ Le couple $(-1 ; 3)$ vérifie l'équation $\textcircled{1}$ ($4 \times (-1) + 3 \times 3 = -4 + 9 = 5$) mais ne vérifie pas l'équation $\textcircled{2}$ ($-1 - 2 \times 3 = -1 - 6 = -7 \neq 4$). Donc le couple $(-1 ; 3)$ n'est pas une solution du système (S)
- ❖ Le couple $(-1 ; 2)$ ne vérifie l'équation $\textcircled{1}$ ($4 \times (-1) + 3 \times 2 = -4 + 6 = 2 \neq 5$) donc le couple $(-1 ; 2)$ n'est pas une solution du système (S).
- ❖ Le couple $(2 ; -1)$ vérifie l'équation $\textcircled{1}$ ($4 \times 2 + 3 \times (-1) = 8 - 3 = 5$) et vérifie l'équation $\textcircled{2}$ ($2 - 2 \times (-1) = 2 + 2 = 4$). Donc le couple $(2 ; -1)$ est une solution du système (S).



III- Méthodes de résolution d'un système

1- Méthode graphique : Pour résoudre graphiquement le système (S)

On représente dans un repère les droites d'équations respectives : $ax + by - c = 0$ et $a'x + b'y - c' = 0$ et on détermine les solutions du système à partir des points communs aux deux droites.

Exemples :

Exemple 1 : on considère le système :

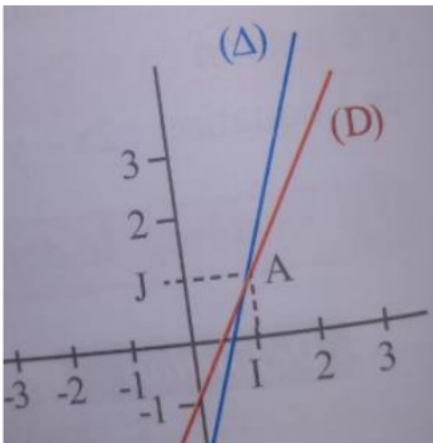
$$(S_1) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Le système (S) est équivalent à :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) je représente la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ et la droite (Δ) d'équation $y = 3x - 2$.

(D) et (Δ) se coupent au point A (1 ; 1)
Donc le couple (1 ; 1) est la solution unique du système (S_1).



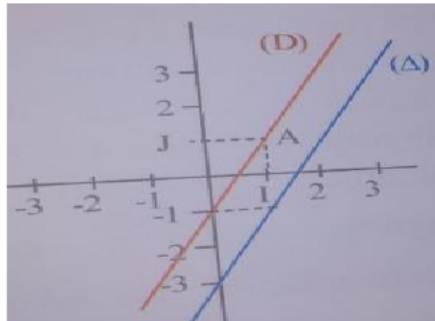
Exemple 2 : on considère le système :

$$(S_2) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

(S_2) est équivalent à :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) je représente la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ et la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 3$.
Les droites (D) et (Δ) sont strictement parallèles. (Elles ont le même coefficient directeur (parallèles) et leurs ordonnées à l'origine sont différentes (pas du point commun)).
Donc le système (S_2) n'admet pas de solution.



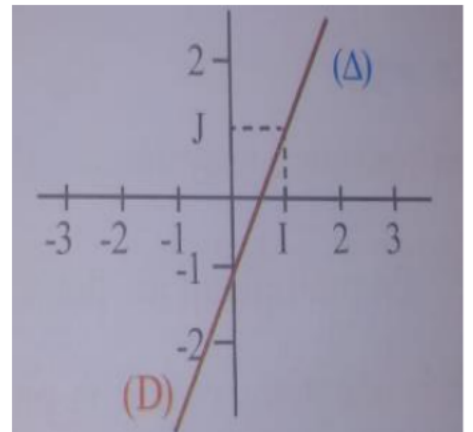
Exemple 3 : on considère le système :

$$(S_3) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

(S_3) Est équivalent à :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Je remarque que les équations du système sont équivalentes ((D) et (Δ) sont confondues). Donc les solutions du système (S_3) sont les solutions de l'équation $y = 2x - 1$.
Le système (S_3) admet une infinité de solutions.
Les couples $(x; 2x - 1)$ sont les solutions du système (S_3).



2 - Méthodes algébriques

A- Résolution par substitution :

Principe : Dans cette méthode, on exprime une des inconnues en fonction de l'autre dans une équation. On remplace ensuite dans l'autre équation.

Exemple 1 : on considère le système suivant : (S_1)

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \textcircled{1} \\ 3x - y = 2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

❖ D'après l'équation $\textcircled{1}$ on a $2x - 1 = y$, dans l'équation $\textcircled{2}$ on remplace y par $2x - 1$

On trouve $3x - (2x - 1) = 2$ on développe $3x - 2x + 1 = 2$ alors $x = 2 - 1$ d'où $x = 1$

❖ Dans $2x - 1 = y$ on remplace x par 1 et on calcule y c'est-à-dire $y = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$ d'où $y = 1$

❖ Le couple (2 ; 1) est la solution unique du système (S_1)

Exemple 2 : on considère le système suivant : (S_2)

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \textcircled{1} \\ 4x - 2y = 6 & \textcircled{2} \end{cases}$$

D'après l'équation $\textcircled{2}$ $4x = 6 + 2y$ on divise par 4 on trouve $x = 3 + \frac{1}{2}y$. Dans l'équation $\textcircled{1}$ on remplace x par $3 + \frac{1}{2}y$ on trouve $2\left(3 + \frac{1}{2}y\right) - y = 1$ on développe $6 + y - y = 1$ d'où $6 = 1$ ce qui est impossible d'où le système (S_2) n'admet pas de solution.

Exemple 3: on considère le système suivant : (S_3)

- ❖ D'après l'équation ① on a $y = 2x - 1$
- ❖ On remplace y par $2x - 1$ dans l'équation ② on trouve $4x - 2(2x - 1) = 2$ on développe $4x - 4x + 2 = 2$ d'où $0x + 2 = 2$ cela est valable pour toutes les valeurs de x .
- ❖ Le système admet une infinité de solutions (S_3)

B- Résolution par combinaison linéaire :

Principe : Dans cette méthode, on multiplie les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de sorte qu'en additionnant membre à membre les équations obtenues, l'une des inconnues est disparue.

Exemple : on considère le système (S)

$$(S) \begin{cases} 4x + 3y = 3 & \text{①} \\ 5x + 2y = -5 & \text{②} \end{cases} \quad \text{On multiplie l'équation ① par 2 et l'équation ② par -3} \quad \begin{cases} 2(4x + 3y = 3) \\ -3(5x + 2y = -5) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On trouve} & \begin{cases} 8x + 6y = 6 \\ -15x - 6y = 15 \end{cases} \quad \text{On additionne membre à membre on obtient : } 8x - 15x + 6y - 6y = 6 + 15 \\ \text{Alors } -7x = 21 & \text{ on divise par } -7 \text{ on trouve } x = -3 \end{aligned}$$

Dans l'équation 1 (ou 2) on remplace x par -3 on trouve $4 \times (-3) + 3y = 3$ alors $-12 + 3y = 3$ d'où $3y = 3 + 12$

$3y = 15$ on divise par 3 on trouve $y = 5$

Le couple $(-3 ; 5)$ est la solution unique de ce système.

IV – les systèmes et la résolution des problèmes

Exemple :

Quatre sandwiches et cinq jus d'orange coûtent 88Dh.
Trois sandwiches et sept jus d'orange coûtent 79Dh.
Quel est le prix d'un sandwich et le prix d'un jus d'orange.

Réponse :

❖ Choix des inconnues :

- ✓ Prix d'un sandwich : x
- ✓ Prix d'un jus d'orange : y

❖ Mise en système :

- ✓ Le prix de quatre sandwiches est $4x$
- ✓ Le prix de cinq jus d'orange est $5y$

Alors le prix de quatre sandwiches et cinq jus d'orange est $4x + 5y$

D'après le texte le prix de quatre sandwiches et cinq jus d'orange est 88Dh

D'où $4x + 5y = 88$

- ✓ Le prix de trois sandwiches est $3x$
- ✓ Le prix de sept jus d'orange est $7y$

Alors le prix de trois sandwiches et sept jus d'orange est $3x + 7y$

D'après le texte le prix de trois sandwiches et sept jus d'orange est 79Dh

D'où $3x + 7y = 79$

Finalement notre système est la suivante :

$$(S) \begin{cases} 4x + 5y = 88 & \text{①} \\ 3x + 7y = 79 & \text{②} \end{cases}$$

❖ Résolution du système :

D'après l'équation ① on a : $4x = 88 - 5y$ alors $\frac{4x}{4} = \frac{88-5y}{4}$ d'où $x = \frac{88-5y}{4}$ dans l'équation ② on remplaçant x par $\frac{88-5y}{4}$ on trouve

$$3 \left(\frac{88-5y}{4} \right) + 7y = 79$$

$$\frac{3 \times 88 - 3 \times 5y + 4 \times 7y}{4} = 79$$

$$264 - 15y + 28y = 79 \times 4$$

$$13y = 316 - 264$$

$$13y = 52$$

$$y = \frac{52}{13} = \frac{13 \times 4}{13}$$

$$\text{D'où } y = 4$$

On remplaçant y par 4 dans l'équation ① on trouve : $4x + 5 \times 4 = 88$

$$4x = 88 - 20$$

$$4x = 68$$

$$x = \frac{68}{4} = \frac{17 \times 4}{4}$$

$$\text{D'où } x = 17$$

❖ Conclusion

- ✓ Le prix d'un sandwich est 17Dh
- ✓ Le prix d'un jus d'orange est 4Dh.

❖ Vérification

- ✓ $4 \times 17 + 5 \times 4 = 68 + 20 = 88$
- ✓ $3 \times 17 + 7 \times 4 = 51 + 28 = 79$