

## تعليمات عامة

- ✓ يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة؛
- ✓ يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه؛
- ✓ ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة.

## مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة، مستقلة فيما بينها، وتتوزع حسب المجالات كما يلي:

|                |                                                        |         |
|----------------|--------------------------------------------------------|---------|
| التمرين الأول  | الهندسة الفضائية                                       | 3 نقط   |
| التمرين الثاني | الأعداد العقدية                                        | 3 نقط   |
| التمرين الثالث | حساب الاحتمالات                                        | 3 نقط   |
| المسألة        | دراسة الدوال العددية وحساب التكامل والمتتاليات العددية | 11 نقطة |

- ✓ نرمزب  $\bar{z}$  لمراقف العدد العقدي  $z$  وب  $|z|$  لمعياره،  
✓  $\ln$  يرمز لدالة اللوغارتم النيبري.

|        |   |       |                                                                                                                |    |
|--------|---|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| الصفحة | 2 | NS 22 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2023 - الموضوع                                              | ↔σ |
| 4      |   |       | - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية ومسلك العلوم الزراعية | ψμ |

### التمرين الأول (3 نقط):

|                                                                                                                                                     |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(0,1,4)$ و $B(2,1,2)$ و $C(2,5,0)$ و $\Omega(3,4,4)$ |      |
| (أ) بين أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$                                                      | 0.25 |
| (ب) استنتج مساحة المثلث $ABC$ والمسافة $d(B, (AC))$                                                                                                 | 0.5  |
| (2) لتكن $D$ منتصف القطعة $[AC]$                                                                                                                    |      |
| (أ) تحقق أن $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$                                                | 0.25 |
| (ب) استنتج أن $d(\Omega, (ABC)) = 3$                                                                                                                | 0.5  |
| (3) لتكن $(S)$ الفلكة ذات المعادلة $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$                                                                        |      |
| (أ) حدد مركز وشعاع الفلكة $(S)$                                                                                                                     | 0.5  |
| (ب) بين أن المستوى $(ABC)$ مماس للفلكة $(S)$ في نقطة ينبغي تحديدها                                                                                  | 0.5  |
| (4) ليكن $(Q_1)$ و $(Q_2)$ المستويين الموازيين لـ $(ABC)$ بحيث يقطع كل واحد منهما $(S)$ وفق دائرة شعاعها $\sqrt{5}$                                 | 0.5  |
| حدد معادلة ديكارتية لكل من المستويين $(Q_1)$ و $(Q_2)$                                                                                              |      |

### التمرين الثاني (3 نقط):

|                                                                                                                                        |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$                      |      |
| التي ألحاقها على التوالي $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $b = 1 + \sqrt{2} + i$ و $c = \bar{b}$ و $d = 2i$                                |      |
| (1) أكتب العدد العقدي $a$ على الشكل المثلثي                                                                                            | 0.25 |
| (2) أ) تحقق أن $b - d = c$                                                                                                             | 0.25 |
| (ب) بين أن $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$ واستنتج أن النقط $A$ و $B$ و $D$ مستقيمية                                                   | 0.5  |
| (3) أ) تحقق أن $ac = 2b$                                                                                                               | 0.25 |
| (ب) استنتج أن $2\arg(b) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$                                                                                   | 0.5  |
| (4) نعتبر الدوران $R$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ، والذي يحول كل نقطة $M$ ذات اللق $z$ ، من المستوى إلى                    |      |
| النقطة $M'$ ذات اللق $z'$                                                                                                              |      |
| (أ) بين أن $z' = \frac{1}{2}az$                                                                                                        | 0.25 |
| (ب) استنتج أن $R(C) = B$ وأن $R(A) = D$                                                                                                | 0.5  |
| (ج) بين أن $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$ ثم استنتج قياسا للزاوية $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ | 0.5  |

|        |   |       |                                                                                                                                                                                        |          |
|--------|---|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| الصفحة | 3 | NS 22 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2023 - الموضوع<br>- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية<br>ومسلك العلوم الزراعية | ↔σ<br>ψμ |
| 4      |   |       |                                                                                                                                                                                        |          |

### التمرين الثالث (3 نقط):

يحتوي صندوق  $U_1$  على ست كرات تحمل الأعداد: 0، 0، 1، 1، 1، 2  
ويحتوي صندوق  $U_2$  على خمس كرات تحمل الأعداد: 1، 1، 1، 2، 2.  
نفترض أنه لا يمكن التمييز بين كرات الصندوقين باللمس.  
نعتبر التجربة العشوائية التالية: نسحب كرة من الصندوق  $U_1$ ، نسجل العدد  $a$  الذي تحمله، ثم  
نضعها في الصندوق  $U_2$  وبعد ذلك نسحب كرة من الصندوق  $U_2$  ونسجل العدد  $b$  الذي تحمله.  
نعتبر الحدثين:  $A$  " الكرة المسحوبة من  $U_1$  تحمل العدد 1 "  
 $B$  " الجداء  $ab$  يساوي 2 "

1 أ) أحسب  $p(A)$ ، احتمال الحدث  $A$  0.5

ب) بين أن  $p(B) = \frac{1}{4}$  (يمكن استعمال شجرة الإمكانيات) 0.5

2 أ) أحسب  $p(A/B)$ ، احتمال الحدث  $A$  علما أن الحدث  $B$  محقق. 0.75

3 ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة للتجربة بالجداء  $ab$

أ) بين أن  $p(X=0) = \frac{1}{3}$  0.25

ب) اعط قانون احتمال  $X$  (لاحظ أن القيم التي يأخذها  $X$  هي: 0 و 1 و 2 و 4) 0.5

ج) نعتبر الحدثين:  $M$  " الجداء  $ab$  زوجي غير منعدم " و  $N$  " الجداء  $ab$  يساوي 1 " 0.5

بين أن الحدثين  $M$  و  $N$  متساويا الاحتمال.

### المسألة (11 نقط):

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي:  $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

ليكن  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة: 1cm)

1 أ) تحقق أن لكل  $x$  من  $[0, +\infty[$ :  $f(x) = \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$  0.25

ب) بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$  وأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  (يمكن وضع  $t = \sqrt{x}$ ) 0.5

ج) استنتج أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة. 0.5

د) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل فرعاً شلجيمياً، اتجاهه محور الأفاصيل بجوار  $+\infty$  0.75

2 بين أن  $f'(x) = \frac{2(1-x+x \ln x)}{x^2}$  لكل  $x$  من  $[0, +\infty[$  0.5

(3) باستثمار جدول التغيرات أسفله للدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$ :

| $x$     | 0         | 1            | $\beta$              | $+\infty$    |
|---------|-----------|--------------|----------------------|--------------|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow 0$ | $\nearrow f'(\beta)$ | $\searrow 0$ |

(نعطي  $\beta \approx 4,9$ )

(أ) أثبت أن الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $]0, +\infty[$  ثم ضع جدول تغيرات  $f$ .

0.5

(ب) أنشئ جدول إشارة الدالة المشتقة الثانية  $f''$  للدالة  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$

0.5

(ج) استنتج تقعر المنحنى  $(C_f)$  محدداً أفصولي نقطتي انعطافه.

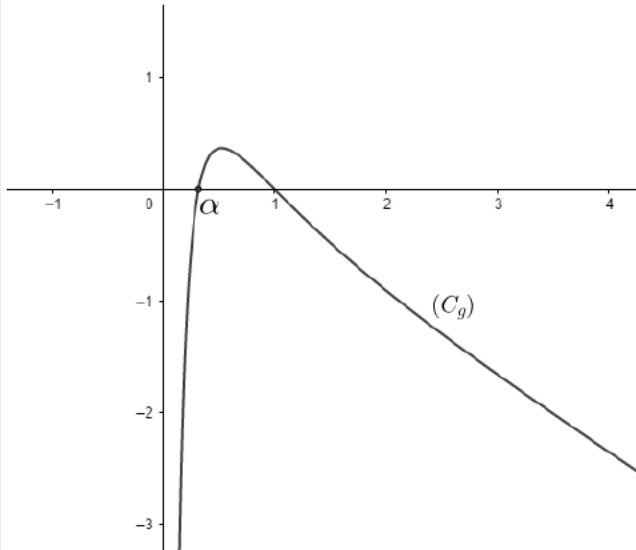
1

(4) المنحنى  $(C_g)$  جانبه، تمثيل مبياني للدالة

$g: x \mapsto f(x) - x$  والتي تنعدم في  $\alpha$  و 1

( $\alpha \approx 0,3$ )

ليكن  $(\Delta)$  المستقيم ذو المعادلة  $y = x$



(أ) انطلاقاً من المنحنى  $(C_g)$ ، حدد إشارة الدالة  $g$  على  $]0, +\infty[$

0.5

(ب) استنتج أن المستقيم  $(\Delta)$  يوجد تحت  $(C_f)$  على المجال  $[\alpha, 1]$  وفوق  $(C_f)$  على كل من  $]0, \alpha[$  و  $]1, +\infty[$

0.5

(5) أنشئ المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (نأخذ  $\alpha \approx 0,3$  و  $\beta \approx 4,9$  و  $f(\beta) \approx 1,9$ )

1.5

(6) أ) تحقق أن الدالة  $x \mapsto 2x - x \ln x$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto 1 - \ln x$  على  $[\alpha, 1]$

0.5

(ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن  $\int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$

1

(ج) استنتج بدلالة  $\alpha$  مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة  $f$  ومحور الأفاصل

0.75

والمستقيمين اللذين معادلتيهما:  $x = 1$  و  $x = \alpha$

(7) لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ  $u_0 \in ]\alpha, 1[$  والعلاقة  $u_{n+1} = f(u_n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(أ) بين بالترجع أن  $\alpha < u_n < 1$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

0.5

(ب) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية. (يمكن استعمال السؤال (4) ب)

0.5

(ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة واحسب نهايتها.

0.75

**الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا**  
**الدورة العادية 2023**



SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS

## مخاطر الإجابة

NR 22

**3h**

## مدة الإنجاز

## الرياضيات

## المادة

7

## المعامل

شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية  
ومسلك العلوم الزراعية

### الشعبة أو الممالك

- نأخذ بعين الاعتبار مختلف مراحل الحل ونقبل كل طريقة صحيحة تؤدي إلى الحل -

| التمرين        | السؤال         | التنقيط | عناصر الإجابة                                                               |
|----------------|----------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------|
| التمرين الأول  | (1 أ)          | 25.0    |                                                                             |
|                | (ب)            | 0.5     | 0.25 للمساحة و 0.25 للمسافة                                                 |
|                | (2 أ)          | 0.25    |                                                                             |
|                | (ب)            | 0.5     | 0.25 للنقطة D، المسقط العمودي ل $\Omega$ على $(ABC)$ و 0.25 لحساب $D\Omega$ |
|                | (3 أ)          | 0.5     | 0.25 للمركز $\Omega$ و 0.25 للشعاع 3                                        |
|                | (ب)            | 0.5     | 0.25 للتماس و 0.25 لنقطة التماس D                                           |
|                | (4)            | 0.5     | 0.25 لكل معادلة : $2x + y + 2z - 12 = 0$ و $2x + y + 2z - 24 = 0$           |
|                | التمرين الثاني | (1)     | 0.25                                                                        |
| (2 أ)          |                | 0.25    |                                                                             |
| (ب)            |                | 0.5     | 0.25 للمتساوية و 0.25 لاستقامية النقط                                       |
| (3 أ)          |                | 0.25    |                                                                             |
| (ب)            |                | 0.5     | 0.25 للعلاقة $\arg a + \arg c \equiv \arg b [2\pi]$ و 0.25 لتتمة الحساب     |
| (4 أ)          |                | 0.25    |                                                                             |
| (ب)            |                | 0.5     | $2 \times 0.25$                                                             |
| (ج)            |                | 0.5     | 0.25 للعلاقة و 0.25 لقياس الزاوية                                           |
| التمرين الثالث | (1 أ)          | 0.5     | 0.25 للصيغة و 0.25 ل $p(A) = \frac{1}{2}$                                   |
|                | (ب)            | 0.5     | 0.25 للطريقة و 0.25 للحساب                                                  |
|                | (2)            | 0.75    | 0.5 للطريقة و 0.25 للنتيجة $p(A/B) = \frac{2}{3}$                           |
|                | (3 أ)          | 0.25    |                                                                             |
|                | (ب)            | 0.5     | 0.25 ل $p(X=1)$ و 0.25 ل $p(X=4)$                                           |
|                | (ج)            | 0.5     | 0.25 ل $p(M) = \frac{1}{3}$ و 0.25 للمقارنة                                 |

| السؤال | التنقيط | عناصر الإجابة                                                                                                                                                                                     |
|--------|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1) أ  | 0.25    |                                                                                                                                                                                                   |
| ب      | 0.5     | 0.25 لحساب كل نهاية                                                                                                                                                                               |
| ج      | 0.5     | 0.25 لحساب النهاية و 0.25 للتأويل الهندسي                                                                                                                                                         |
| د      | 0.75    | 0.25 لحساب النهاية و 0.5 للفرع الشلجي                                                                                                                                                             |
| (2)    | 0.5     | 0.25 لصيغ الاشتقاق و 0.25 للحساب                                                                                                                                                                  |
| (3) أ  | 0.5     | $2 \times 0.25$                                                                                                                                                                                   |
| ب      | 0.5     | 0.25 للإشارات و 0.25 لـ $f''(1) = f''(\beta) = 0$                                                                                                                                                 |
| ج      | 1       | 0.5 لتقعر المنحنى و 0.25 لكل نقطة انعطاف                                                                                                                                                          |
| (4) أ  | 0.5     |                                                                                                                                                                                                   |
| ب      | 0.5     | 0.25 لكل وضع نسبي                                                                                                                                                                                 |
| (5)    | 1.5     | أنظر المبيان أسفله: 0.25 لإنشاء $(\Delta)$ و 0.25 للمماس في 1 و 0.25 للفرع الشلجي و 0.25 للمقارب العمودي و 0.25 لتقاطع المنحنى مع $(\Delta)$ و 0.25 لتغيير التقعر عند النقطة التي أفصولها $\beta$ |
| (6) أ  | 0.5     | 0.25 لاستحضار تعريف الدالة الأصلية و 0.25 للنتيجة                                                                                                                                                 |
| ب      | 1       | 0.5 لتقنية المكاملة بالأجزاء و 0.5 للحساب                                                                                                                                                         |
| ج      | 0.75    | 0.25 لصيغة المساحة و 0.25 لحساب $\int_{\alpha}^1 \left(2 - \frac{2}{x}\right) dx$ و 0.25 لتتمة الحساب                                                                                             |
| (7) أ  | 0.5     | 0.25 لمبدأ التراجع و 0.25 لبقية الحساب                                                                                                                                                            |
| ب      | 0.5     |                                                                                                                                                                                                   |
| ج      | 0.75    | 0.25 للمعطيات الضرورية للمتتالية (اتصال الدالة، استقرار المجال) و 0.25 لتعليل التقارب و 0.25 لحساب النهاية.                                                                                       |

المسألة

