



Table des matières

- I.** EXERCICE N° 1 : EQUATION DIFFERENTIELLE
- II.** EXERCICE N° 1 : PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE ET PRODUIT VECTORIEL
- III.** EXERCICE N° 2 : NOMBRES COMPLEXES .
- IV.** EXERCICE N° 3 : PROBABILITE
- V.** EXERCICE N° 4 : FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE ET SUITE DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$.

01

01. Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E_1) : \begin{cases} y' = \frac{2}{x} - 1 + 4x \\ y(1) = -7 \end{cases}$.

02. Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E_2) : \begin{cases} 2y' + 14y = 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

03. Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E_2) : \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 ; y'(0) = -3 \end{cases}$.

02

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère :

- La droite (D) passant par le point A dont le vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
- Les deux points $A(3, 1, 2)$ et $B(2, 1, 0)$.

01. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

02. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) .

03. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par A et orthogonale à la droite (D) .

04. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}$ puis déduis la distance du point B à la droite (D) .

05. Calculer : la surface du triangle ABC .

06. Soit la sphère (S) de centre B et tangente à la droite (D) ; le point H la projection de B sur le plan (P) .

- a. Déterminer l'équation cartésienne du sphère (S) .
- b. Déterminer les coordonnées du point H .
- c. Déterminer l'intersection de (S) et (P) .

03

01.

..



- a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 7 = 0$.
b. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 7y = 0$.

02. On considère le polynome suivant : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ dont z est un complexe .

- a. Calculer : $P(-1)$.
b. Déterminer a et b de $\mathbb{R}$ tel que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$.
c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $P(z) = 0$.

03. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$; unité de mesure est 2 cm .

- a. Donner le module et l'argument le nombre complexe suivant : $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
b. Donner la forme algébrique de z^6 .
c. On considère les points A et B et C d'affixes respectivement $a = -1$ et $b = 2 + i\sqrt{3}$ et $c = 2 - i\sqrt{3}$. Calculer la distance AB .
d. Donner la forme trigonométrique puis la forme exponentielle du nombre complexe : $\frac{b-a}{c-a}$.
e. On déduit la nature du triangle ABC .

04. On considère la rotation R de centre le point A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- a. Graphiquement déterminer l'image du point C par la rotation R .
b. Prouver ce résultat en utilisant les questions précédentes .
c. Donner l'écriture complexe de la rotation R ; puis vérifie une autre fois de l'image de C par R .
d. Vérifier que $c = -2 + 9i$ et $d = 1 + 2i$ les affixes des points C et D tel que : $R(A) = C$ et $R(B) = D$.
e. Montrer que : $(AD) \perp (BC)$ et $AD = BC$.

05. Soit (C) l'ensemble des points M du plan complexe (P) d'affixe $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que : $x^2 + y^2 - 4x - 2\sqrt{3}y - 5 = 0$

- a. Montrer que (C) est un cercle on précise l'affixe de son centre et son rayon .
b. Montrer que : $M_{(z)} \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.
c. Soit (C') l'image de (C) par la rotation R ; déterminer la nature de (C') .
d. Montrer que les points A et C appartiennent à (C') .



Un sac contient huit boules indiscernables au touche dont :

- Cinq boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 2 ; 2 3
- trois boules noires numérotées : 0 ; 1 ; 2 .
- On tire au hasard et simultanément 3 boules du sac .



01. On considère les événements suivants :

- ❖ A « on obtient seulement deux boules blanches »
- ❖ B « la somme des nombres des trois boules tirées est 6 »

a. Montrer que : $p(A) = \frac{18}{35}$ et $p(B) = \frac{1}{35}$.

b. Calculer : $p(A \cap B)$.

c. Est-ce que les événements A et B sont indépendants.

02. On considère la variable aléatoire X « qui associe à chaque tirage de trois boules le nombre des boules blanches tirées ».

a. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs de X).

b. Montrer que : $p(X=2) = \frac{3}{10}$ et $p(X=3) = \frac{3}{10}$.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

d. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

03. On répète l'expérience précédent cinq fois tel que chaque fois on remet les trois boules tirées au sac avant de répéter l'expérience une autre fois.

- On considère la variable aléatoire Y définie par « le nombre de fois l'événement A est réalisé lorsqu'on répète l'expérience précédent cinq fois »

a. Comment on appelle la variable aléatoire Y et on précise ses paramètres.

b. Donner l'ensemble $Y(\Omega)$ (ensemble des valeurs de Y).

c. Donner $p(Y=k)$ avec $k \in X(\Omega)$.

d. Calculer : l'espérance mathématique $E(Y)$; la variance $V(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.



PARTIE 1 :

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(1+x^2)$.

01. ..

a. Vérifier que : $f(x) = x - 2\ln|x| - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

d. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $-\infty$.

e. Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.

02. ..

f. Calculer la fonction dérivée de f et vérifie que $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

g. Donner le tableau de variation de g.



h. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 0$.

03. ..

a. Vérifier que la fonction dérivée seconde de f est : $f''(x) = 2 \frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2}$.

b. Etudier le signe f'' puis donner la concavité de (C_f) et préciser les points d'inflexions de la courbe.

c. Construire la courbe (C_f) de f et la tangente (T) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité de mesure 1 cm. (sur l'annexe 2 voir page 4).

04. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty, 1]$

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine.

b. Construire la courbe $(C_{g^{-1}})$ de la fonction réciproque g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c. Calculer $g(0)$; puis montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(g^{-1})'(0)$.

PARTIE 2 :

01.

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n^2) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. Montrer que $f([0, +\infty[) =]0, +\infty[$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$.

c. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

d. On déduit que (u_n) est une suite convergente.

e. Déterminer la limite de la suite (u_n) .



